Sucesiones de números reales

Introducción

Las sucesiones aparecen de manera natural en muchos cálculos que responden a un esquema iterativo. Por ejemplo, al dividir 2 entre 3 obtenemos $\dfrac{2}{3}=\dfrac{6}{10}+\dfrac{2}{3}\dfrac{1}{10}$, igualdad que podemos usar ahora para obtener

$$\frac{2}{3}=\frac{6}{10}+\left(\frac{6}{10}+\frac{2}{3}\frac{1}{10}\right)\frac{1}{10}=\frac{6}{10}+\frac{6}{10^2}+\frac{2}{3}\frac{1}{10^2}$$

y de nuevo

$$\frac{2}{3}=\frac{6}{10}+\frac{6}{10^2}+\left(\frac{6}{10}+\frac{2}{3}\frac{1}{10}\right)\frac{1}{10^2}=\frac{6}{10}+\frac{6}{10^2}+\frac{6}{10^3}+\frac{2}{3}\frac{1}{10^3}$$

y así podemos continuar tantas veces como queramos, obteniendo para cada $n\in\mathbb{N}$ la igualdad:

$$\frac{2}{3}=\sum_{k=1}^{n}\frac{6}{10^k}+\frac{2}{3}\frac{1}{10^n}.$$

Escribiendo $x_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{6}{10^k}$ tenemos que $0<\dfrac{2}{3}-x_n=\dfrac{2}{3}\dfrac{1}{10^n}$. Nótese que, aunque los números x_n son *todos ellos distintos* de $2/3$, dada una cota de error arbitrariamente pequeña $\varepsilon>0$ y tomando $n_0\in\mathbb{N}$ de manera que $\dfrac{2}{3}\dfrac{1}{10^{n_0}}<\varepsilon$, deducimos que *para todo* número natural $n\geqslant n_0$ se verifica que $|x_n-2/3|<\varepsilon$, lo que se expresa escribiendo $2/3=\lim\limits_{n\to\infty}\{x_n\}$.

Este ejemplo está relacionado con la expresión decimal de $2/3$ que, como todos sabemos, es un decimal periódico con período igual a 6, lo que suele escribirse $2/3=0,\widehat{6}$ igualdad en la que, según se dice a veces, el símbolo $0,\widehat{6}$ debe interpretarse como que el 6 *se repite infinitas veces*. ¿Qué quiere decir esto? Lo que está claro es que, por mucho tiempo y paciencia que tengamos, nunca podremos escribir *infinitos* 6 uno detrás de otro... bueno, podríamos escribir algo como

$$\frac{2}{3}=0,\widehat{6}=0,6666666\ldots(\text{ infinitos } 6)$$

lo que tampoco sirve de mucho pues seguimos sin saber cómo se interpreta esta igualdad. Pues bien, para dar un significado matemático a lo que se quiere expresar con esa igualdad hay que recurrir al concepto de límite de una sucesión tal como hemos hecho antes.

Veamos otro ejemplo en esta misma línea. Vamos a intentar calcular aproximaciones racionales a $\sqrt{10}$. Si partimos inicialmente de un número $x>\sqrt{10}$, tendremos que $\dfrac{10}{x}<\sqrt{10}<x$. Pongamos $y=\dfrac{1}{2}\left(x+\dfrac{10}{x}\right)$. Entonces, en virtud de la desigualdad de las

medias, $\sqrt{10} < y$, y como también $y < x$, deducimos que y está más cerca de $\sqrt{10}$ que x. Podemos ahora repetir este proceso sustituyendo x por y obteniendo una nueva aproximación mejor de $\sqrt{10}$. Nótese que si x es racional también lo será y. Esto sugiere que, partiendo de un valor inicial, por ejemplo $x_1 = 4$, calculemos $x_2 = \frac{1}{2}\left(x_1 + \frac{10}{x_1}\right)$, y después $x_3 = \frac{1}{2}\left(x_2 + \frac{10}{x_2}\right)$, y así podemos continuar tantas veces como queramos, obteniendo para cada $n \in \mathbb{N}$ un número x_n tal que

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{10}{x_n}\right)$$

con $x_1 = 4$. Con una calculadora manual obtenemos enseguida los valores $x_2 = 3,25$; $x_3 = 3,1634615$; $x_4 = 3,1622779$ con seis cifras decimales exactas:

$$0 < x_4 - \sqrt{10} = \frac{x_4^2 - 10}{x_4 + \sqrt{10}} < \frac{x_4^2 - 10}{6} < \frac{0,000005}{6} < \frac{1}{10^6}$$

es decir, x_4 coincide con $\sqrt{10}$ hasta la sexta cifra decimal. De hecho, como $x_n > \sqrt{10}$ tenemos que:

$$0 < x_{n+1} - \sqrt{10} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{10}{x_n}\right) - \sqrt{10} < \frac{1}{2}x_n + \frac{1}{2}\sqrt{10} - \sqrt{10} = \frac{1}{2}(x_n - \sqrt{10})$$

de donde se sigue que $0 < x_{n+1} - \sqrt{10} < \frac{1}{2^n}(x_1 - \sqrt{10}) < \frac{1}{2^n}$, por tanto, dado cualquier $\varepsilon > 0$, y tomando $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $2^{-n_0} < \varepsilon$, deducimos que *para todo* número natural $n \geqslant n_0$ se verifica que $|x_n - \sqrt{10}| < \varepsilon$, lo que simbólicamente se expresa escribiendo $\sqrt{10} = \lim_{n\to\infty} \{x_n\}$.

En los ejemplos anteriores hemos dado por supuesto que ya tienes cierta familiaridad con los conceptos de “sucesión” y de “límite de una sucesión” de los cuales vamos a ocuparnos a continuación con detalle.

Sucesión de elementos de un conjunto

Sea A un conjunto no vacío. Una sucesión de elementos de A es una **aplicación** del conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales en A. En particular, una sucesión de números reales es una **aplicación** del conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales en el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales.

En todo lo que sigue solamente consideraremos sucesiones de números reales por lo que nos referiremos a ellas simplemente como “sucesiones”.

Dada una sucesión $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ suele emplearse una notación especial para representarla. Para $n \in \mathbb{N}$ suele notarse el número real $\varphi(n)$ en la forma $x_n = \varphi(n)$ (naturalmente la letra “x” nada tiene de especial y puede sustituirse por cualquier otra). La sucesión misma se representa por $\varphi = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, es decir, el símbolo $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ debe interpretarse como la **aplicación** que a cada $n\in\mathbb{N}$ hace corresponder el número real x_n. Cuando no hay posibilidad de confusión escribimos simplemente $\{x_n\}$ en vez de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Conviene insistir en que $\{x_n\}$ es, por definición, la **aplicación** de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{R}$ dada por $n\mapsto x_n$. No hay que confundir la sucesión $\{x_n\}$, que es una aplicación, con su **conjunto imagen**, que es el subconjunto de $\mathbb{R}$ formado por todos los números x_n, el cual se representa por $\{x_n : n\in\mathbb{N}\}$. Por ejemplo, $\{(-1)^n\}$ y $\{(-1)^{n+1}\}$ son sucesiones distintas con el mismo conjunto imagen. El número x_n se llama *término n-ésimo* de la sucesión; para $n = 1, 2, 3$ se habla respectivamente de primero, segundo, tercer término de la sucesión.

Sucesiones de números reales convergentes

Una sucesión $\{x_n\}$ se dice que **converge a un número real** x si, dado cualquier número real $\varepsilon > 0$, existe un número natural m_ε tal que si n es cualquier número natural mayor o igual que m_ε se cumple que $|x_n - x| < \varepsilon$. Simbólicamente:

$$\forall\varepsilon > 0\ \ \exists m_\varepsilon\in\mathbb{N}\ : n \geqslant m_\varepsilon \Rightarrow |x_n - x| < \varepsilon$$

Se dice también que el número x es **límite de la sucesión** $\{x_n\}$ y se escribe $\lim\limits_{n\to\infty}\{x_n\} = x$ o, simplemente, $\lim\{x_n\} = x$ e incluso, si no hay posibilidad de confusión, $\{x_n\}\to x$. Se comprueba fácilmente que *una sucesión convergente tiene un único límite*.

Estudiamos a continuación cómo se comportan las sucesiones convergentes respecto de las estructuras algebraica y de orden de $\mathbb{R}$.

Proposición

Supongamos que $\lim\{x_n\} = x$, $\lim\{y_n\} = y$ y que existe $m\in\mathbb{N}$ tal que para todo $n \geqslant m$ se tiene que $x_n \leqslant y_n$. Entonces se verifica que $x \leqslant y$.

Respecto al resultado anterior, de muy fácil demostración, conviene advertir que *aunque las desigualdades sean estrictas no puede asegurarse que* $\lim\{x_n\} = x$ *sea estrictamente menor que* $\lim\{y_n\} = y$. Por ejemplo, si $x_n = 0$ e $y_n = 1/n$, es claro que $x_n < y_n$ para todo $n\in\mathbb{N}$ pero $x = 0 = y$.

Principio de las sucesiones encajadas

Supongamos que $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ son sucesiones tales que $\lim\{x_n\} = \lim\{z_n\} = \alpha$ y existe un número natural m_0 tal que para todo $n \geqslant m_0$ se verifica que $x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$, entonces la sucesión $\{y_n\}$ es convergente y $\lim\{y_n\} = \alpha$.

Demostración

Sea $\varepsilon > 0$. Por hipótesis existen m_1, m_2 tales que

$$\alpha - \varepsilon < x_p < \alpha + \varepsilon \quad \text{y} \quad \alpha - \varepsilon < z_q < \alpha + \varepsilon \tag{1}$$

para todo $p \geqslant m_1$ y todo $q \geqslant m_2$. Sea $m_3 = \max\{m_0, m_1, m_2\}$. Para todo $n \geqslant m_3$ las desigualdades (1) se cumplen para $p = q = n$, además como $n \geqslant m_0$ se tiene que $x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$. Deducimos que, para todo $n \geqslant m_3$, se verifica que

$$\alpha - \varepsilon < x_n \leqslant y_n \leqslant z_n < \alpha + \varepsilon$$

y, por tanto, $\alpha - \varepsilon < y_n < \alpha + \varepsilon$, es decir, $\lim\{y_n\} = \alpha$.

Una consecuencia inmediata de este resultado es que si cambiamos arbitrariamente un número finito de términos de una sucesión la nueva sucesión así obtenida es convergente si lo era la de partida y con su mismo límite.

El principio de las sucesiones encajadas es de gran utilidad y se usa con mucha frecuencia. Naturalmente, cuando apliquemos dicho principio a un caso concreto, la sucesión $\{y_n\}$ del enunciado será la que queremos estudiar y tendremos que ser capaces de “inventarnos” las sucesiones $\{x_n\}$ y $\{z_n\}$ de manera que se cumplan las condiciones del enunciado.

Una sucesión $\{x_n\}$ se dice que es:

Mayorada o acotada superiormente si su conjunto imagen está mayorado, es decir, si hay un número $\mu \in \mathbb{R}$ tal que $x_n \leqslant \mu$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Minorada o acotada inferiormente si su conjunto imagen está minorado, es decir, si hay un número $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\lambda \leqslant x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Acotada si su conjunto imagen está mayorado y minorado, equivalentemente, si hay un número $M \in \mathbb{R}^+$ tal que $|x_n| \leqslant M$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Creciente si $x_n \leqslant x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Estrictamente creciente si $x_n < x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Decreciente si $x_n \geqslant x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Estrictamente decreciente si $x_n > x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Monótona si es creciente o decreciente.

Estrictamente monótona si es estrictamente creciente o decreciente.

Nótese que si una sucesión $\{x_n\}$ es creciente (resp. decreciente) entonces se verifica que $x_m \leqslant x_n$ (resp. $x_m \geqslant x_n$) siempre que $m \leqslant n$.

Conviene advertir que cuando se dice que una sucesión es monótona *no se excluye* la posibilidad de que, de hecho, sea estrictamente monótona. Es por ello que, en general, suele hablarse de sucesiones monótonas y tan sólo cuando tiene algún interés particular se precisa si son estrictamente monótonas.

Proposición

Toda sucesión convergente está acotada.

Demostración

Supongamos que $\lim\{x_n\} = x$. Todos los términos de $\{x_n\}$ a partir de uno en adelante estarán en el intervalo $]x-1, x+1[$, es decir, hay un número $m \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geqslant m$ se verifica que $|x_n - x| < 1$, lo que implica que

$$|x_n| \leqslant |x_n - x| + |x| < 1 + |x| \quad \text{para todo } n \geqslant m.$$

Tomando $M = \max\{1+|x|, |x_1|, \cdots, |x_m|\}$, tenemos que $|x_n| \leqslant M$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

La proposición anterior es útil a veces para probar que una sucesión *no* es convergente: para ello basta probar que no está acotada.

La proposición recíproca de la anterior no es cierta: la sucesión $\{(-1)^n\}$ es acotada y *no* es convergente. No obstante, hay un caso especial muy importante en que sí es cierta la recíproca.

Teorema

Toda sucesión monótona y acotada es convergente. Más concretamente, si una sucesión $\{x_n\}$ es:

i) Creciente y mayorada, entonces $\lim\{x_n\} = \beta$, donde $\beta = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.

ii) Decreciente y minorada, entonces $\lim\{x_n\} = \alpha$, donde $\alpha = \inf\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Demostración

Probaremos $i)$ quedando la demostración de $ii)$ como ejercicio. La hipótesis de que $\{x_n\}$ es mayorada garantiza, en virtud del principio del supremo, la existencia del número real $\beta = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Dado $\varepsilon > 0$, tiene que existir un término x_m de la sucesión tal que $\beta - \varepsilon < x_m$. Puesto que la sucesión es creciente para todo $n \geqslant m$ se verificará que $x_m \leqslant x_n$, y por tanto $\beta - \varepsilon < x_n$. En consecuencia $\beta - \varepsilon < x_n < \beta + \varepsilon$ para todo $n \geqslant m$. Hemos probado así que $\lim\{x_n\} = \beta$.

Ejemplo

La sucesión $\{x_n\}$ definida por $x_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$, es convergente.

En efecto, como

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n+1} > \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} = 0$$

se sigue que $x_{n+1} > x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, es decir, es una sucesión creciente. Además

$$x_n \leqslant \frac{1}{n+1} + \overset{(n}{\cdots} + \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1} < 1$$

por lo que también está mayorada. Concluimos, por el teorema anterior, que dicha sucesión es convergente.

En los resultados anteriores han intervenido de manera esencial las propiedades de la estructura de orden de $\mathbb{R}$. Vamos a estudiar ahora el comportamiento de las sucesiones convergentes respecto de la adición y el producto de números reales. Los resultados que vamos a obtener, conocidos tradicionalmente con el nombre de *álgebra de límites*, son básicos para el estudio de la convergencia de sucesiones.

Dadas dos sucesiones $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$, se define su **suma** como la sucesión $\{x_n+y_n\}$ y su **producto** como la sucesión $\{x_n y_n\}$.

Proposición

El producto de una sucesión convergente a cero por una sucesión acotada es una sucesión convergente a cero.

Demostración

Sea $\lim\{x_n\} = 0$, e $\{y_n\}$ acotada. Sea $c>0$ tal que $|y_n| \leqslant c$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Dado $\varepsilon > 0$, existe un número natural m tal que para todo $n \geqslant m$ se verifica que $|x_n| < \varepsilon/c$. Deducimos que, para todo $n \geqslant m$, se verifica que $|x_n y_n| = |x_n||y_n| < \dfrac{\varepsilon}{c} c = \varepsilon$, lo que prueba que $\lim\{x_n y_n\} = 0$.

Álgebra de límites

Supongamos que $\lim\{x_n\} = x$ y $\lim\{y_n\} = y$. Entonces se verifica que:

$$\lim\{x_n + y_n\} = x+y, \quad \lim\{x_n y_n\} = xy\,.$$

Si además suponemos que $y \neq 0$, entonces $\lim\{x_n/y_n\} = x/y$.

Demostración

Dado $\varepsilon > 0$, por hipótesis existen m_1, m_2 tales que

$$x - \varepsilon/2 < x_p < x + \varepsilon/2 \quad \text{y} \quad y - \varepsilon/2 < y_q < y + \varepsilon/2 \tag{2}$$

para todo $p \geqslant m_1$ y todo $q \geqslant m_2$. Sea $m_0 = \max\{m_1, m_2\}$. Para todo $n \geqslant m_0$ las desigualdades (2) se cumplen para $p=q=n$, por lo que, sumándolas término a término, deducimos que $x+y-\varepsilon < x_n + y_n < x+y+\varepsilon$ cualquiera sea $n \geqslant m_0$, lo que prueba que $\lim\{x_n + y_n\} = x+y$.

Teniendo en cuenta que $\lim\{(x_n - x)y_n\} = \lim\{x(y_n - y)\} = 0$, y la igualdad

$$x_n y_n - xy = (x_n - x)y_n + x(y_n - y)$$

deducimos que $\lim\{x_n y_n - xy\} = 0$, es decir, $\lim\{x_n y_n\} = xy$.

Finalmente, para probar que $\lim\{x_n/y_n\} = x/y$, probaremos que la sucesión

$$\left\{\frac{x_n}{y_n} - \frac{x}{y}\right\} = \left\{\frac{x_n y - y_n x}{y_n y}\right\}$$

converge a cero, para lo cual, teniendo en cuenta que $\lim\{x_n y - y_n x\} = xy - yx = 0$, bastará probar que la sucesión $\{1/y_n\}$ está acotada. Puesto que $\lim\{y_n\} = y$, se deduce de la desigualdad $||y_n| - |y|| \leqslant |y_n - y|$ que $\lim\{|y_n|\} = |y|$. Existirá, por tanto, un número $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geqslant m_0$ es $|y_n| > |y|/2$. Pongamos $K = \max\left\{\frac{1}{|y_1|}, \frac{1}{|y_2|}, \dots, \frac{1}{|y_{m_0}|}, \frac{2}{|y|}\right\}$. Se tiene entonces que $\frac{1}{|y_n|} \leqslant K$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Hemos probado así que la sucesión $\{1/y_n\}$ está acotada, lo que concluye la demostración del teorema.

Hay que leer con atención las hipótesis del teorema anterior para no hacer un uso incorrecto del mismo. En particular, no hay que olvidar que *la suma o el producto de dos sucesiones no convergentes puede ser una sucesión convergente*.

Sucesiones parciales y valores de adherencia

Sea $\{x_n\}$ una sucesión de números reales; dada una aplicación $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *estrictamente creciente*, la sucesión que a cada número natural n hace corresponder el número real $x_{\sigma(n)}$ se representa por $\{x_{\sigma(n)}\}$ y se dice que es una **sucesión parcial** de $\{x_n\}$. Nótese que $\{x_{\sigma(n)}\}$ no es otra cosa que la composición de las aplicaciones $\{x_n\}$ y σ, esto es, $\{x_{\sigma(n)}\} = \{x_n\} \circ \sigma$.

Se dice que un número real x es un **valor de adherencia** de la sucesión $\{x_n\}$ si hay alguna sucesión parcial de $\{x_n\}$ que converge a x.

Ejemplo

La sucesión $\{x_n\}$ dada por $x_n = n/5 - E(n/5)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, tiene a $0, 1/5, 2/5$, $3/5$ y $4/5$, como valores de adherencia.

En efecto, basta considerar que para cada $j \in \{0,1,2,3,4\}$, la sucesión parcial $\{x_{5n-j}\}_{n\in\mathbb{N}}$ viene dada por $x_{5n} = 0$, para $j = 0$, y $x_{5n-j} = 1 - j/5$ para $j = 1,2,3,4$.

Es fácil probar por inducción que si σ es una aplicación estrictamente creciente de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$ entonces se verifica que $\sigma(n) \geqslant n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Con ello se obtiene fácilmente el siguiente resultado.

Proposición

Si $\lim\{x_n\} = x$, toda sucesión parcial de $\{x_n\}$ también converge a x. En particular, una sucesión convergente tiene como único valor de adherencia su límite.

Nótese que hay sucesiones, la de los números naturales por ejemplo, que no tienen *ningún* valor de adherencia. También puede ocurrir que una sucesión *tenga un único valor de adherencia y no sea convergente*. Por ejemplo, la sucesión dada para todo $n\in\mathbb{N}$ por $x_n=(1+(-1)^n)n+1/n$, no es convergente y tiene a 0 como único valor de adherencia. Vamos a ver a continuación que estos comportamientos no pueden darse con sucesiones acotadas.

Lema

Toda sucesión tiene una sucesión parcial monótona.

Demostración

Sea $\{x_n\}$ una sucesión y definamos

$$A=\{n\in\mathbb{N}: x_n\geqslant x_p \quad \text{para todo } p>n\}$$

Podemos visualizar el conjunto A como sigue. Consideremos en el plano los segmentos de extremos (n,x_n) y $(n+1,x_{n+1})$, $n=1,2,3,\ldots$. Resulta así una línea poligonal infinita y podemos imaginar que dicha línea es el perfil de una cordillera cuyas cumbres y valles son los puntos (n,x_n). Imaginemos ahora que los rayos de luz del Sol, paralelos al eje de abscisas, iluminan dicha cordillera por el lado derecho (el Sol estaría, pues, situado en el infinito del eje de abscisas positivo). Pues bien, un número natural n pertenece al conjunto A si el punto (n,x_n) está iluminado y no pertenece a A si dicho punto está en sombra.

Supongamos que A es infinito. Entonces podemos definir una aplicación $\sigma:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ estrictamente creciente y tal que $\sigma(\mathbb{N})=A$ de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}&\sigma(1)=\min(A)\\&\sigma(n+1)=\min\{p\in A:\sigma(n)<p\} \ \text{ para todo } n\in\mathbb{N}\end{aligned}$$

es decir la aplicación σ va eligiendo los elementos de A de menor a mayor empezando por el primero. Resulta ahora evidente que la sucesión parcial $\{x_{\sigma(n)}\}$ es decreciente (todos los puntos $(\sigma(n),x_{\sigma(n)})$ están iluminados y, por tanto, ninguno de ellos puede hacerle sombra a uno anterior).

Si A es finito podemos suponer que $A=\varnothing$. En tal caso, para todo $n\in\mathbb{N}$ hay algún $p>n$ tal que $x_n<x_p$ (pues todo punto (n,x_n) está en sombra). Podemos definir ahora una aplicación $\sigma:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ estrictamente creciente de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}&\sigma(1)=1\\&\sigma(n+1)=\min\{p\in\mathbb{N}:\sigma(n)<p \ \text{ y } \ x_{\sigma(n)}<x_p\} \ \text{ para todo } n\in\mathbb{N}\end{aligned}$$

Resulta ahora evidente que la sucesión parcial $\{x_{\sigma(n)}\}$ es creciente (porque cada punto $(\sigma(n),x_{\sigma(n)})$ deja en la sombra al anterior).

Teorema de Bolzano - Weierstrass

Toda sucesión acotada de números reales tiene alguna sucesión parcial convergente.

Demostración

Sea $\{x_n\}$ una sucesión acotada. En virtud el lema anterior, hay una sucesión parcial de $\{x_n\}$ que es monótona, dicha sucesión parcial está acotada por estarlo $\{x_n\}$ y, por tanto, es convergente.

Teorema

Una sucesión acotada que tiene un único valor de adherencia es convergente.

Demostración

Sea $\{x_n\}$ una sucesión acotada no convergente; probaremos que dicha sucesión tiene al menos dos valores de adherencia. El teorema de Bolzano-Weierstrass nos dice que $\{x_n\}$ tiene al menos un valor de adherencia. Sea, pues, λ un valor de adherencia de $\{x_n\}$. Como $\{x_n\}$ no converge a λ, tiene que existir $\rho > 0$ tal que el conjunto $A = \{n \in \mathbb{N} : |x_n - \lambda| \geqslant \rho\}$ sea infinito. Es fácil definir ahora una aplicación $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ estrictamente creciente tal que $\sigma(\mathbb{N}) = A$. La sucesión $\{x_{\sigma(n)}\}$ está acotada y, por el teorema de Bolzano-Weierstrass, tiene al menos un valor de adherencia, μ. Es fácil probar ahora que μ es también un valor de adherencia de $\{x_n\}$ y $\lambda \neq \mu$.

Si volvemos a leer la definición de sucesión convergente, parece que para estudiar la convergencia de una sucesión $\{x_n\}$ debemos ser capaces de "adivinar", de alguna manera, su posible límite. De hecho, una idea bastante extendida consiste en pensar que es lo mismo probar la convergencia de una sucesión que calcular su límite. Esto no es del todo correcto; son relativamente pocas las sucesiones convergentes cuyo límite puede efectivamente calcularse. Cuando se estudia la convergencia de una sucesión $\{x_n\}$, la mayoría de las veces, lo que conocemos es, justamente, la sucesión y, naturalmente, se desconoce su posible límite el cual pudiera, incluso, no existir. Por ello interesa tener *criterios de convergencia intrínsecos a la sucesión*, es decir, que no hagan intervenir a un objeto en principio *extraño* a ella como es su posible límite. Conocemos ya un criterio de convergencia intrínseco para sucesiones *monótonas*. Usando dicho criterio hemos probado la convergencia de la sucesión $x_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$ *sin necesidad de conocer su límite.*

A continuación vamos a establecer un criterio intrínseco de convergencia para sucesiones que es más general pues puede aplicarse a cualquier sucesión. Este criterio fué formulado por Bolzano en 1817 y también, independientemente, por Cauchy en 1821, y establece una condición necesaria y suficiente para la convergencia de una sucesión. Dicha condición se conoce con el nombre de *condición de Cauchy.*

Condición de Cauchy

Se dice que una sucesión $\{x_n\}$ satisface la condición de Cauchy, si para cada número positivo, $\varepsilon > 0$, existe un número natural m_ε, tal que para todos $p,q \in \mathbb{N}$ con $p \geqslant m_\varepsilon$ y $q \geqslant m_\varepsilon$ se verifica que $|x_p - x_q| < \varepsilon$.

La condición de Cauchy puede también expresarse de una manera equivalente, aunque formalmente distinta, como sigue:

Una sucesión $\{x_n\}$ satisface la condición de Cauchy, si para cada número positivo, $\varepsilon > 0$, existe un número natural m_ε, tal que para todo $p \geqslant m_\varepsilon$ y *para todo número natural h*, se verifica que $|x_{p+h} - x_p| < \varepsilon$.

Teorema de complitud de $\mathbb{R}$

Una sucesión de números reales es convergente si, y sólo si, verifica la condición de Cauchy.

Demostración

Supongamos que $\{x_n\}$ verifica la condición de Cauchy. Probemos primero que $\{x_n\}$ está acotada. La condición de Cauchy implica que hay $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_p - x_{m_0}| < 1$ para todo $p \geqslant m_0$, y como $|x_p| \leqslant |x_p - x_{m_0}| + |x_{m_0}|$, deducimos que $|x_p| < 1 + |x_{m_0}|$ para $p \geqslant m_0$. En consecuencia si definimos $M = \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_{m_0}|, 1+|x_{m_0}|\}$, obtenemos que $|x_n| \leqslant M$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

El teorema de Bolzano-Weierstrass garantiza que hay un número real x y una sucesión parcial $\{x_{\sigma(n)}\}$ que converge a x. Probaremos que $\{x_n\}$ también converge a x. Dado $\varepsilon > 0$, existe $n_o \in \mathbb{N}$ tal que $|x_p - x_q| < \varepsilon/2$ siempre que $p,q \geqslant n_o$. También existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_{\sigma(n)} - x| < \varepsilon/2$ siempre que $n \geqslant n_1$. Sea $m = \max\{n_o, n_1\}$. Para todo $n \geqslant m$ se tiene que $\sigma(n) \geqslant n \geqslant m$ por lo que

$$|x_n - x| \leqslant |x_n - x_{\sigma(n)}| + |x_{\sigma(n)} - x| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

lo que prueba que $\lim\limits_{n\to\infty} \{x_n\} = x$.

Recíprocamente, si $\{x_n\}$ es convergente y $\lim\{x_n\} = x$, dado $\varepsilon > 0$, hay un número $m_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que para todo número natural $n \geqslant m_\varepsilon$ se tiene que $|x_n - x| < \varepsilon/2$. Deducimos que si p,q son números naturales mayores o iguales que m_ε entonces $|x_p - x_q| \leqslant |x_p - x| + |x - x_q| <$ $< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$. Por tanto la sucesión $\{x_n\}$ verifica la condición de Cauchy.

Sucesiones divergentes

Una sucesión $\{x_n\}$ se dice que es:

Positivamente divergente, y escribimos $\{x_n\} \to +\infty$, si para todo número real $K > 0$ existe un número natural $m_K \in \mathbb{N}$, tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ con $n \geqslant m_K$ se verifica que $x_n \geqslant K$.

Negativamente divergente, y escribimos $\{x_n\} \to -\infty$, si para todo número real $K<0$ existe un número natural $m_K \in \mathbb{N}$, tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ con $n \geqslant m_K$ se verifica que $x_n \leqslant K$.

Diremos que una sucesión es divergente para indicar que es positivamente o negativamente divergente. En la siguiente proposición se exponen algunas propiedades elementales, pero importantes, de las sucesiones divergentes. Teniendo en cuenta que $\{x_n\} \to +\infty$ si, y sólo si, $\{-x_n\} \to -\infty$, es suficiente enunciar dichas propiedades para sucesiones positivamente divergentes.

Proposición

i) $\{|x_n|\} \to +\infty$ si, y sólo si, $\{1/x_n\} \to 0$.

ii) La suma de una sucesión positivamente divergente con una sucesión acotada es una sucesión positivamente divergente.

iii) La suma de una sucesión positivamente divergente con una sucesión minorada es otra sucesión positivamente divergente. En particular, la suma de dos sucesiones positivamente divergentes es otra sucesión positivamente divergente.

iv) El producto de dos sucesiones positivamente divergentes es otra sucesión positivamente divergente.

vi) El producto de una sucesión positivamente divergente por una sucesión que converge a un número positivo es otra sucesión positivamente divergente.

El siguiente resultado establece una importante relación entre el límite funcional y el límite de sucesiones.

Proposición

Sea f una función y sean $a, L \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. Equivalen las afirmaciones:

i) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$

ii) Para toda sucesión $\{x_n\}$ de puntos en el dominio de definición de f, tal que $x_n \neq a$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\{x_n\} \to L$, se verifica que $\{f(x_n)\} \to L$.

Este resultado permite enunciar en términos de convergencia de sucesiones los resultados relativos a límites funcionales. El siguiente es un ejemplo.

Proposición

a) Una sucesión $\{x_n\}$ converge a $x \in \mathbb{R}$ si, y sólo si, $\{e^{x_n}\}$ converge a e^x.

b) Una sucesión de números positivos $\{y_n\}$ converge a un número positivo $y>0$ si, y sólo si, la sucesión $\{\log(y_n)\}$ converge a $\log(y)$.

c) Para toda sucesión $\{x_n\}$ se verifica que:

i) $\{x_n\} \to +\infty$ si, y sólo si, $\{\mathrm{e}^{x_n}\} \to +\infty$; ii) $\{x_n\} \to -\infty$ si, y sólo si, $\{\mathrm{e}^{x_n}\} \to 0$.

d) Para toda sucesión de números positivos $\{x_n\}$ se verifica que:

i) $\{x_n\} \to +\infty$ si, y sólo si, $\{\log(x_n)\} \to +\infty$; ii) $\{x_n\} \to 0$ si, y sólo si, $\{\log(x_n)\} \to -\infty$.

Sucesiones asintóticamente equivalentes

Dadas dos sucesiones $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ cuyos términos a partir de uno en adelante son todos distintos de cero, diremos que $\{x_n\}$ es asintóticamente equivalente a $\{y_n\}$, y escribiremos simbólicamente $\{x_n\} \sim \{y_n\}$, si $\{x_n/y_n\} \to 1$.

El siguiente resultado nos dice que para estudiar la convergencia o divergencia de un producto de varias sucesiones podemos sustituir las que queramos por otras que sean asintóticamente equivalentes, sin que ello afecte a la convergencia o divergencia del producto ni a su eventual límite.

Proposición

Supongamos que $\{x_n\} \sim \{y_n\}$, $\{z_n\}$ es cualquier sucesión y $L \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. Se verifica entonces que $\{x_n z_n\} \to L$ si, y sólo si, $\{y_n z_n\} \to L$.

Ejemplos de sucesiones asintóticamente equivalentes

Supongamos que $\{x_n\} \to 0$. Entonces se verifica que:

$$\begin{array}{lll} \{x_n\} \sim \{\log(1+x_n)\}; & \{x_n\} \sim \{\mathrm{e}^{x_n} - 1\}; & \{(1+x_n)^{\alpha} - 1\} \sim \{\alpha x_n\} \\ \{\operatorname{sen} x_n\} \sim \{x_n\}; & \{\operatorname{arc\,sen} x_n\} \sim \{x_n\}; & \{\operatorname{arc\,tg} x_n\} \sim \{x_n\} \end{array}$$

Indeterminaciones y sucesiones de potencias

Frecuentemente hay que estudiar la convergencia o divergencia de una suma o producto de dos sucesiones precisamente cuando las reglas que hemos visto antes no pueden aplicarse. Se trata de aquellos casos en que el comportamiento de las sucesiones $\{x_n + y_n\}$, $\{x_n y_n\}$ no está determinado por el de $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$. Por ejemplo, si sabemos que $\{x_n\} \to +\infty$ y que $\{y_n\} \to -\infty$, ¿qué podemos decir del comportamiento de la sucesión $\{x_n + y_n\}$? Respuesta: absolutamente nada. En consecuencia, las sucesiones del tipo $\{x_n + y_n\}$ donde $\{x_n\} \to +\infty$, $\{y_n\} \to -\infty$, *requieren un estudio particular en cada caso*. Tales sucesiones suele decirse que son **una indeterminación del tipo** "$\infty - \infty$".

Análogamente, si sabemos que $\{x_n\} \to 0$ y que $\{y_n\}$ es divergente, ello no proporciona ninguna información sobre el comportamiento de la sucesión $\{x_n y_n\}$; la cual se dice que es **"una indeterminación del tipo** "0∞". Las indeterminaciones que aparecen al estudiar el cociente de dos sucesiones divergentes o de dos sucesiones que convergen a cero, las llamadas **indeterminaciones de los tipos** "∞/∞", "$0/0$", pueden reducirse a una indeterminación del tipo "0∞".

Todavía hemos de considerar nuevas indeterminaciones que van a surgir al considerar *sucesiones de potencias*, es decir, sucesiones de la forma $\{x_n^{y_n}\}$ donde $\{x_n\}$ es una sucesión de números positivos e $\{y_n\}$ es una sucesión cualquiera de números reales. Puesto que $x_n^{y_n} = \exp(y_n \log(x_n))$, la convergencia o divergencia de la sucesión $\{x_n^{y_n}\}$ vendrá determinada por la de $\{y_n \log(x_n)\}$; la cual, a su vez, está determinada en todos los casos por el comportamiento de las sucesiones $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$, excepto cuando dicha sucesión $\{y_n \log(x_n)\}$ es una indeterminación del tipo "$0\,\infty$", lo que ocurre en los siguientes casos:

a) $\{x_n\} \to 1$, $\{|y_n|\} \to +\infty$ (indeterminación "1^∞")
b) $\{x_n\} \to +\infty$, $\{y_n\} \to 0$ (indeterminación "∞^0")
c) $\{x_n\} \to 0$, $\{y_n\} \to 0$ (indeterminación "0^0")

Ni que decir tiene que no hay técnicas generales que permitan "resolver las indeterminaciones"; ¡no serían tales si las hubiera! Es por ello que, los límites indeterminados, requieren un estudio particular en cada caso. Expondremos a continuación algunos resultados muy útiles para el estudio de los mismos. Empezaremos por un importante resultado que permite resolver en muchos casos las indeterminaciones "1^∞" y "$0\,\infty$".

Criterio de equivalencia logarítmica para sucesiones

Supongamos que $\lim\{x_n\} = 1$, $\{y_n\}$ es una sucesión cualquiera y L un número real. Entonces se tiene que:

i) $\lim\{x_n^{y_n}\} = \mathrm{e}^L$ si, y sólo si, $\lim\{y_n(x_n - 1)\} = L$.

ii) $\{x_n^{y_n}\} \to +\infty$ si, y sólo si, $\{y_n(x_n - 1)\} \to +\infty$.

iii) $\{x_n^{y_n}\} \to 0$ si, y sólo si, $\{y_n(x_n - 1)\} \to -\infty$.

Demostración

Puesto que $x_n^{y_n} = \exp(y_n \log(x_n))$, las afirmaciones hechas en i), ii) y iii), se deducen del hecho de que las sucesiones $\{\log(x_n)\}$ y $\{x_n - 1\}$ son asintóticamente equivalentes.

Vamos a exponer a continuación un útil resultado que, en muchas ocasiones, permite resolver indeterminaciones de la forma "∞/∞". Nótese su analogía con las reglas de L'Hôpital.

Criterio de Stolz

Sea $\{y_n\}$ una sucesión positivamente divergente y estrictamente creciente y sea $\{x_n\}$ cualquier sucesión. Supongamos que $\left\{\dfrac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n}\right\} \to L$ donde L es un número real, o $L = +\infty$, o $L = -\infty$. Entonces se verifica también que $\{x_n/y_n\} \to L$.

Demostración

Supongamos, en primer lugar, que $L \in \mathbb{R}$. Dado $\varepsilon > 0$, existe, por hipótesis, un número natural k, tal que para todo $q \geqslant k$ se verifica que

$$L - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{x_{q+1} - x_q}{y_{q+1} - y_q} < L + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Multiplicando por $y_{q+1} - y_q > 0$ y sumando desde $q = k$ a $q = n$, obtenemos:

$$L - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{x_{n+1} - x_k}{y_{n+1} - y_k} < L + \frac{\varepsilon}{2} \qquad (3)$$

cualquiera sea $n \geqslant k$. Teniendo en cuenta ahora la igualdad

$$\frac{x_{n+1}}{y_{n+1}} - L = \frac{x_k - Ly_k}{y_{n+1}} + \left(1 - \frac{y_k}{y_{n+1}}\right)\left(\frac{x_{n+1} - x_k}{y_{n+1} - y_k} - L\right)$$

deducimos que

$$\left|\frac{x_{n+1}}{y_{n+1}} - L\right| \leqslant \left|\frac{x_k - Ly_k}{y_{n+1}}\right| + \left|\frac{x_{n+1} - x_k}{y_{n+1} - y_k} - L\right| \qquad (4)$$

Como $\lim\limits_{n\to\infty}\big\{(x_k - Ly_k)/y_{n+1}\big\} = 0$, existe un número natural m tal que, para todo $n \geqslant m$, se verifica

$$\left|\frac{x_k - Ly_k}{y_{n+1}}\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Teniendo en cuenta (3) y (4), deducimos que

$$\left|\frac{x_{n+1}}{y_{n+1}} - L\right| < \varepsilon$$

para todo $n \geqslant \max\{k, m\}$. Hemos probado, pues, que $\lim\{x_n/y_n\} = L$.

Supongamos ahora que $L = +\infty$. En tal caso, para todo $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, se tendrá que $x_{n+1} - x_n > y_{n+1} - y_n > 0$, por lo que podemos suponer que $\{x_n\}$ es estrictamente creciente. Además, al ser $L = +\infty$, se tendrá que $\{x_n\}$ diverge positivamente. Podemos usar ahora lo ya probado, intercambiando las sucesiones $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$, para obtener que

$$\lim\left\{\frac{y_n}{x_n}\right\} = \lim\left\{\frac{y_{n+1} - y_n}{x_{n+1} - x_n}\right\} = 0$$

de donde se sigue que $\{x_n/y_n\} \to +\infty$.

El caso $L = -\infty$ se reduce al previo cambiando la sucesión $\{x_n\}$ por $\{-x_n\}$.

Es importante observar que, aún en las hipótesis del Criterio de Stolz, puede ocurrir que $\left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\}$ sea convergente pero no lo sea $\left\{\dfrac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n}\right\}$; es decir, el Criterio de Stolz da una condición suficiente pero no necesaria para la convergencia o divergencia de $\{x_n/y_n\}$.

Del Criterio de Stolz se deducen dos útiles criterios para estudiar la convergencia de sucesiones de medias aritméticas o geométricas.

Criterio de la media aritmética

Supongamos que $\{a_n\} \to L$ donde L es un número real, o $L = +\infty$, o $L = -\infty$. Entonces se verifica que $\left\{\dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}\right\} \to L$.

Demostración

Basta aplicar el Criterio de Stolz a las sucesiones $x_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, $y_n = n$.

Criterio de la media geométrica

Supongamos que $\{a_n\} \to L$ donde $\{a_n\}$ es una sucesión de números positivos y L es un número real o bien $L = +\infty$. Entonces se verifica que $\left\{\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}\right\} \to L$.

Demostración

Lo afirmado se deduce del criterio de la media aritmética teniendo en cuenta que

$$\log\left(\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}\right) = \frac{\log(a_1) + \log(a_2) + \cdots + \log(a_n)}{n}.$$

Corolario

Supongamos que $\{x_{n+1}/x_n\} \to L$ donde $\{x_n\}$ es una sucesión de números positivos y L es un número real o bien $L = +\infty$. Entonces se verifica que $\{\sqrt[n]{x_n}\} \to L$.

Demostración

Es consecuencia del criterio de la media geométrica aplicado a la sucesión $\{a_n\}$ definida por $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \dfrac{x_{n+1}}{x_n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.